Контрольная работа №3

Неопределенный и определенный интеграл

Задача 13. Найти неопределенные интегралы, в пунктах а) и б) результаты проверить дифференцированием.

а) $\int e^{sinx} cosxdx$

$$\int e^{sinx} cosxdx = |dsinx = cosxdx| = \int e^{sinx} dsinx = e^{sinx} + C$$

Проверяем дифференцированием

$$\left(e^{sinx}\right)' = e^{sinx} (sinx)' = e^{sinx} cosx$$

б) $\int x3^{x/2} dx$

Проводим интегрирование по частям

u = x, dv = $3^{x/2}$dx

$$v = \int 2 * 3^{\frac{x}{2}} d\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2 * 3^{x/2}}{ln3}$$

$$\int x3^{x/2} dx = \frac{2x * 3^{x/2}}{ln3} - \int \frac{2 * 3^{x/2}}{ln3} dx = \frac{2x * 3^{x/2}}{ln3} - \frac{4}{ln^2 3} * 3^{x/2} + C$$

Проверяем дифференцированием

$$\left(\frac{2x * 3^{x/2}}{ln3} - \frac{4}{ln^2 3} * 3^{x/2}\right)' = \frac{2 * 3^{x/2}}{ln3} + \frac{2x * \frac{1}{2} * ln3 * 3^{x/2}}{ln3} - \frac{4 * \frac{1}{2} * ln3}{ln^2 3} * 3^{x/2}$$
$$= x * 3^{x/2}$$

в) $\int \frac{x+2}{x^2+2x+5} dx$

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5} + 2 \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2}$$
$$= \frac{1}{2} ln(x^2+2x+5) + \frac{1}{2} arctg \frac{x+1}{2} + C$$

г) $\int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 \frac{dx}{x}$

$\int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 \frac{dx}{x} = \int \left(\frac{9d(x-1)}{(x-1)^2} - 3\frac{d(x-1)}{x-1} + 4\frac{dx}{x}\right) = -\frac{9}{2(x-1)} - 3ln(x-1)$+4lnx +C д) $\int \frac{\sqrt[4]{x}+1}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}}dx$

Делаем подстановку $t = \sqrt[4]{x}$

$dt = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\mathrm{dx}$

$dx = 4\sqrt[4]{x^3}dt$

Тогда

$$4\int \frac{t+1}{t^2+4}dt = 4\int \frac{1}{2}\frac{d(t^2+4)}{t^2+4} + \frac{dt}{t^2+4} = 2\ln(t^2+4) + 2arctg\frac{t}{2} + C$$

Подставляем t

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}+1}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}}dx = 2ln(\sqrt{x}+4) + 2arctg\frac{\sqrt[4]{x}}{2} + C$$

е) $\int \frac{cos^3xdx}{sin^4x}$

$$\int \frac{cos^3xdx}{sin^4x} = \int \frac{(1-sin^2x)}{sin^4x}d(sinx)$$
$$= \int\left(\frac{d(sinx)}{sin^4x} - \frac{d(sinx)}{sin^2x}\right) = -\frac{1}{3sin^3x} + \frac{1}{sinx}$$

Задача 14. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

$$\int_0^\infty xsinxdx$$

Решаем интеграл по частям

$$\int udv = u*v + \int vdu$$

u=x; dv = sinx*dx

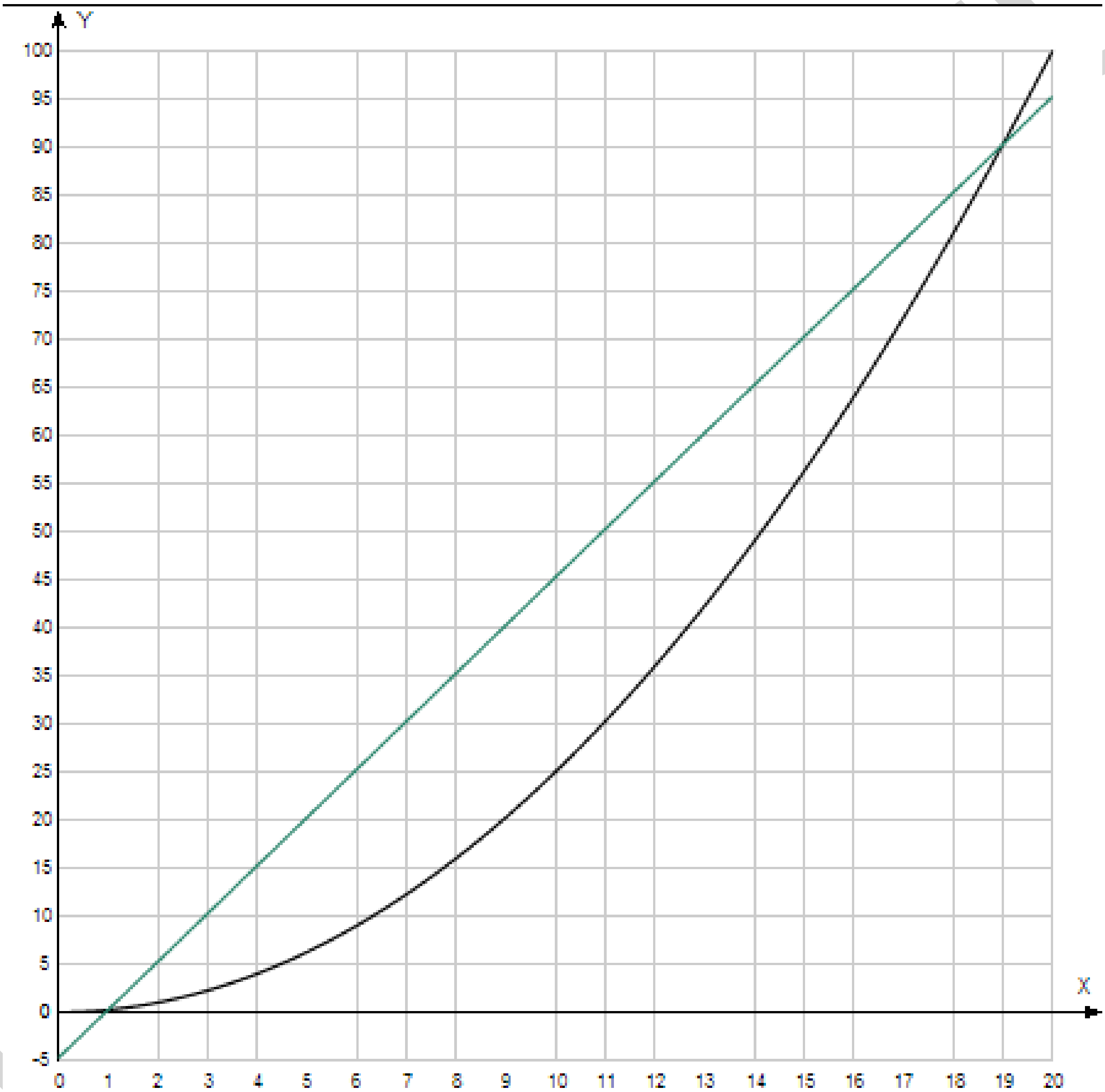
du = dx, v= -cosx

$$\int_0^\infty xsinxdx = -xcosx_0^\infty + sinx_0^\infty = -\infty * cos\infty + sin\infty$$

Предел интеграла неопределен, следовательно интеграл расходится.

Задача 15. Вычислить площадь фигуры, заключенной между данными линиями.

а) $y=0,25x^2$; $y=5x-19/4$



,

Находим точку пересечения прямой с осью ОХ

$5x-19/4 =0$

$x = 19/4*5 = 0,95$

Находим точку пересечения прямой и параболы

$0,25x^2 = 5x-19/4$

$0,25x^2-5x+19/4=0$

$x_1=1$, $x_2=19$

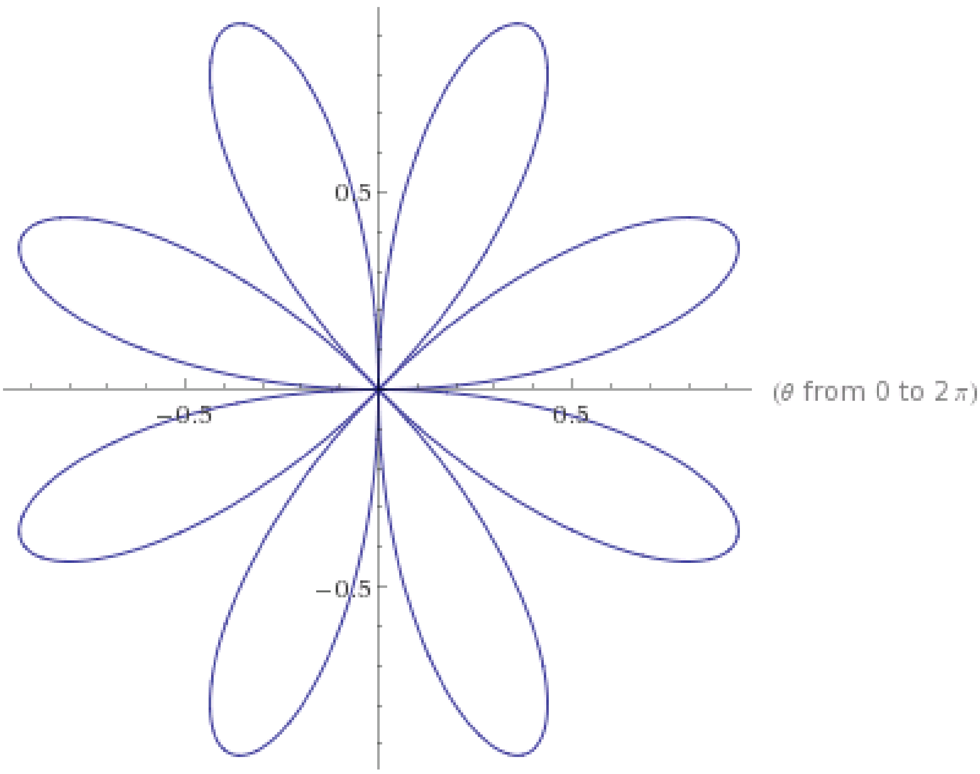
Тогда площадь фигуры находим как

$$S=\int\limits_0^{0,95} 0,25x^2dx+\int\limits_{0,95}^{1}(0,25x^2-5x+19/4)\,dx+\int\limits_1^{19}\left(5x-\frac{19}{4}-0,25x^2\right)dx$$

$$S=\frac{0,25}{3}x^3\Big|_0^{0,95}+\frac{0,25}{3}x^3\Big|_{0,95}^{1}-2,5x^2\Big|_{0,95}^{1}+\frac{19}{4}x\Big|_{0,95}^{1}-\frac{0,25}{3}x^3\Big|_1^{19}+2,5x^2\Big|_1^{19}-\frac{19}{4}x\Big|_1^{19}$$

$S=-571,16666+899,75625-85,2625=243,32709$ кв. ед.

б) r=sin4φ



Площадь криволинейного сектора рассчитывается по формуле

$$S=\frac{1}{2}\int_a^b r^2(\varphi)\,d\varphi$$

Тогда

$$S=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} sin^2 4\varphi\, d\varphi=\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{16}\sin(8\varphi)\Big|_0^{2\pi}\right)=\frac{\pi}{2}\ \text{кв. ед.}$$

Задача 16. При растяжении пружины на 2 см надо приложить силу 6 кг. Вычислить ее работу при сжатии на 8 см. Решить в системе СИ.

Находим коэффициент жесткости пружины

$k = F/x = m*g/l_1 = 6*9,8/0,02 = 2940$ Н/м

Работу при сжатии можно вычислить как

$$A=\int_{0}^{l_2} kxdx=\int_{0}^{0,06} 2940*xdx=1470x^2\Big|_0^{0,06}=5,292\ \text{Дж}$$

Контрольная работа №4

Дифференциальные уравнения

Задача 17. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка.

$$y^{'}-2xy=xe^{-x^2}$$

Если линейное уравнение записано в стандартном виде

$$y^{'}+a(x)y=f(x)$$

То интегрирующий множитель определяется формулой

$$u(x)=exp\left(\int a(x)dx\right)=exp\left(\int -2xdx\right)=e^{-x^2}$$

Умножаем обе части на u(x)

$$\frac{\frac{dy(x)}{dx}}{e^{x^2}}-\frac{(2x)y(x)}{e^{x^2}}=\frac{x}{e^{2x^2}}$$

Подставляем

$$-2xe^{-x^2}=\frac{d\left(e^{-x^2}\right)}{dx}$$

$$\frac{\frac{dy(x)}{dx}}{e^{x^2}} - \frac{d\left(e^{-x^2}\right)}{dx} = \frac{x}{e^{2x^2}}$$

Применяем правило

$$g\frac{df}{dx} + f\frac{dg}{dx} = \frac{d(fg)}{dx}$$

$$\frac{d\left(\frac{y(x)}{e^{x^2}}\right)}{dx}dx = \frac{x}{e^{2x^2}}$$

Интегрируем левую и правую часть

$$\int \frac{d\left(\frac{y(x)}{e^{x^2}}\right)}{dx}dx = \int \frac{x}{e^{2x^2}}$$

$$\frac{y(x)}{e^{x^2}} = -\frac{1}{4e^{2x^2}} + C$$

Умножаем на e^{x^2}

$$y(x) = e^{x^2}\left(-\frac{1}{4e^{2x^2}} + C\right)$$

Задача 18. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

$$y'' y^3 = -64$$

y(0)=4, y'(0)=2

Приводим к уравнению

$$y'' = -\frac{64}{y^3}$$

Имеем уравнения вида y’’ = f(y)

Вводим новую функцию, полагая, что y’ = p(y)

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p$$

И уравнение принимает вид

$$\frac{dp}{dy}p = f(y) = -\frac{64}{y^3}$$

$$\int 2pdp = \int -\frac{128dy}{y^3}$$

$$p^2 = \frac{64}{y^2} + C_1$$

p(0) = 2, y(0)=4

Тогда

$$2^2 = \frac{64}{4^2} + C_1$$

$C_1 = 0$

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{64}{y^2}}$$

$$dx = \frac{ydy}{8}$$

$$\int dx = \int \frac{ydy}{8}$$

$$x = \frac{y^2}{16} + C_2$$

Подставляем y(0)=4

$C_2 = -1$

Тогда частное решение дифференциального уравнения будет

$$y = \sqrt{16(x+1)}$$

Задача 19. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

y'' + 4y = 4cos2x

y(0)=0, y'(0)=3

Подставляем $y(x)=e^{\lambda x}$ и находим общее решение

$$\frac{d^2(e^{\lambda x})}{dx^2}+4e^{\lambda x}=0$$

$\lambda^2 e^{\lambda x}+4e^{\lambda x}=0$

$(\lambda^2+4)e^{\lambda x}=0$

$\lambda^2+4=0$

Корни уравнения

$\lambda=\pm 2i$

Общее решение будет иметь вид

$$y=C_1 e^{2ix}+\frac{C_2}{e^{2ix}}$$

Применяем уравнение Эйлера

$$e^{\alpha+i\beta}=e^{\alpha}cos\beta+ie^{\alpha}sin\beta$$

Тогда

$y(x) = c_1(\cos 2x + i\sin 2x)+ c_2(\cos 2x-i*\sin 2x)$

или

$y(x) =(c_1+c_2)\cos 2x+i(c_1-c_2)\sin 2x$

Обозначим $C_1 = c_1+c_2$ и $C_2= i(c_1-c_2)$

$y(x) =C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$

Найдем частное решение уравнения в форме

$y_p(x) = x(a_1\cos 2x+a_2\sin 2x)$

Подставляем частное решение в дифференциальное уравнение

$-4a_1x\cos 2x-4a_1\sin 2x+4a_2\cos 2x-4a_2x\sin 2x+4a_1x\cos 2x+a_2x\sin 2x=4\cos 2x$

Упрощаем

$4a_2\cos 2x-4a_1\sin 2x=4xos2x$

Находим коэффициенты

cos2x: $4a_2 = 4$

sin2x: $-4a_1=0$

$a_2=1$, $a_1=0$

подставляем a_1 и a_2

$y_p = x\sin 2x$

Решение уравнения является сумма общего и частного решения

$y(x) = x\sin 2x + C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$

Подставляем y(0)=0

Имеем $C_1=0$

Подставляем $y^{'}(0) = 3$

$$\frac{dy}{dx} = -2C_1 sin2x + 2C_2 cos2x + sin2x + 2xcos2x$$

$C_2 = 1{,}5$

Подставляем C_1 и C_2 в решение

y(x) = (2x+3)*sinx*cosx

Задача 20. Найти общее решение дифференциального уравнения

$y'' - 2y' + y = e^x \ln x$

Находим общее решение

Подставляем $y(x)=e^{\lambda x}$ в дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2(e^{\lambda x})}{dx^2} - 2\frac{d(e^{\lambda x})}{dx} + e^{\lambda x} = 0$$

$\lambda^2 e^{\lambda x} - 2\lambda e^{\lambda x} + e^{\lambda x} = 0$

$e^{\lambda x}(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$

$(\lambda-1)^2 = 0$

$\lambda=1$

Общее решение будет иметь вид

y(x) = $c_1e^x + xc_2e^x$

Найдем частное решение

Найдем определитель Вронского для

$$y_{b_1}(x) = e^x$$

$$y_{b_2}(x) = xe^x$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ \frac{d(e^x)}{dx} & \frac{d(xe^x)}{dx} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^{2x}$$

f(x)=e^xlogx

$$\nu_1(x) = -\int \frac{f(x)y_{b_2}(x)}{W(x)}$$

$$\nu_2(x) = -\int \frac{f(x)y_{b_1}(x)}{W(x)}$$

Частное решение представлено как

$$y_p(x) = \nu_1(x)y_{b_1}(x) + \nu_2(x)y_{b_2}(x)$$

Вычисляем $\nu_1(x)$

$$\nu_1(x) = -\int x log(x)dx = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}x^2\log(x)$$

Вычисляем $\nu_2(x)$

$$\nu_2(x) = -\int log(x)dx = -x - x\log(x)$$

Частное решение будет

$$y_p(x) = e^x\left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}x^2\log(x)\right) + xe^x\big(-x + log(x)\big)$$

$$y_p(x) = \frac{1}{4}e^x x^2(2logx - 3)$$

$$y(x) = c_1e^x + xc_2e^x + \frac{1}{4}e^x x^2(2logx - 3)$$

Задача 21. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases}$$

Берем второе уравнение и выражаем через него x

$$x = \frac{dy}{2 * dt} - \frac{3y}{2}$$

Дифференцируем по t

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d^2y}{2dt^2} - \frac{3}{2}\frac{dy}{dt}$$

Подставляем x и $\frac{dx}{dt}$ в первую формулу

$$\frac{d^2y}{2dt^2} - \frac{3dy}{2dt} = \frac{dy}{2dt} - \frac{3y}{2} + 4y$$

$$\frac{d^2y}{2dt^2} - \frac{2dy}{dt} - \frac{5}{2}y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{4dy}{dt} - 5y = 0$$

Составим характеристическое уравнение

λ^2-4λ-5=0

λ_1=-1, λ_2=5

$$y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{5t}$$

Дифференцируем по t

$$\frac{dy(t)}{dt} = -C_1e^{-t} + 5C_2e^{5t}$$

Подставляем y и производную y'

$$x(t) = -\frac{C_1}{2}e^{-t} + \frac{5}{2}C_2e^{5t} - \frac{3}{2}C_1e^{-t} - \frac{3}{2}C_2e^{5t} = -2C_1e^{-t} + C_2e^{5t}$$

Запишем общее решение

$$\begin{cases} x(t) = -2C_1e^{-t} + C_2e^{5t} \\ y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{5t} \end{cases}$$

Задача 22. Пуля входит в доску толщиной h м со скоростью ν_0 м/с, а вылетает из доски со скоростью ν_1 м/с. Принимая, что сила сопротивления доски движению пули пропорциональна квадрату скорости движения, найти время движения пули через доску.

h=0,02; ν_0=500; ν_1=400

$$\frac{dv}{dt} = -kv^2$$

$$\frac{dv}{v^2} = -kdt$$

$$\int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{v^2} = \int_0^t -kdt$$

$$kt = \frac{1}{400} - \frac{1}{500} = 0{,}0005$$

$-\frac{1}{v} = -kt + C$

Из граничных условий при t=0 v=500 находим C

$$-\frac{1}{500} = C$$

$$v = \frac{1}{kt + \frac{1}{500}}$$

С другой стороны

$$h = \int_0^t \frac{1}{kt + \frac{1}{500}} dt = \int_0^t \frac{1}{k} \frac{1}{kt + \frac{1}{500}} d\left(kt + \frac{1}{500}\right)$$
$$= \frac{1}{k}\left(\ln\left(kt + \frac{1}{500}\right) - ln\left(\frac{1}{500}\right)\right)$$

Тогда

$$0{,}02 = \frac{1}{k} ln\left(\frac{0{,}0005 + \frac{1}{500}}{\frac{1}{500}}\right) = \frac{1}{k} 0{,}2231$$

k = 0,2231/0,02 = 11,1571

t = 0,0005/11.1571 = $4{,}48*10^{-5}$